Über einige Identitäten der Interpolationstheorie und ihre Anwendung zur Bestimmung kleinster Maxima.

Von Leopold Fejér in Budapest.

1. Ich habe unlängst[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Sind die voneinander verschiedenen reellen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ gelegen, so ist (wie unmittelbar ersichtlich) das Maximum der Quadratsumme der Grundpolynome der zu den Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörigen Lagrangeschen Interpolation im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ mindestens gleich 1, d. h.

$$(1) \qquad \operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} \geqq 1.$$

Es gibt aber nur eine einzige Verteilung der Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, für welche das Maximum der Quadratsumme in $-1 \leqq x \leqq 1$ diesen minimalen Wert 1 hat, d. h. für welche

$$(2) \qquad \operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} = 1$$

gültig ist; diese Abszissen sind die n Wurzeln der Gleichung

$$(3) \qquad (1-x^2)\, P'_{n-1}(x) = 0,$$

[1]) L. Fejér. *a)* Anwendung der konjugierten Punkte bei Lagrangescher Interpolation (ungarisch), *Math. u. Naturw. Anzeiger der ungarischen Akademie*, Sitzung vom 20. April 1931; erscheint demnächst. *b)* Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte; erscheint demnächst in den *Math. Annalen*. *c)* Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation ein möglichst kleines Maximum besitzt; erscheint demnächst in den *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*.

wo $P_{n-1}(x)$ das $(n-1)$-te LEGENDREsche Polynom bezeichnet. Bei diesen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist übrigens für jedes x

$$(4)\quad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{(1-x^2)(P'_{n-1}(x))^2}{n(n-1)}.$$

Unter $l_k(x)$, das ich eben das zu x_k gehörige „LAGRANGEsche Grundpolynom“ (Grundfunktion) nenne, verstehe ich diejenige ganze rationale Funktion von $(n-1)$-tem Grade, die an der Stelle $x = x_k$ den Wert 1 hat, an allen übrigen Interpolationsstellen $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ aber verschwindet.

Bei dem Beweise dieses Satzes spielt die Identität

$$(5)\qquad l_1(x) + l_2(x) + \ldots + l_n(x) \equiv 1$$

keine[2]) Rolle, wohl aber die Identität

$$(6)\qquad v_1(x)(l_1(x))^2 + v_2(x)(l_2(x))^2 + \ldots + v_n(x)(l_n(x))^2 \equiv 1,$$

wo

$$(7)\qquad v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(8)\qquad \omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad C \neq 0,$$

die von jeher die Grundlage meiner Untersuchungen über reelle HERMITEsche und LAGRANGEsche Interpolation bildete.

Der Beweis dieser Identität (6) ist übrigens sehr einfach. Da nämlich, wie leicht ersichtlich, für das Polynom

$$(9)\qquad h_k(x) = v_k(x)(l_k(x))^2$$

die Gleichungen

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} h_k(x_\nu) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{für} \quad \nu \neq k \\ 1, & \text{für} \quad \nu = k, \end{array} \right. \\ h'_k(x_\nu) = 0, \\ \nu, k = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right.$$

gültig sind, so stellt also die linke Seite von (6) eine ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in x dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Wert 1 annimmt, und deren Derivierte an allen diesen Stellen verschwindet. Da aber die 1 eine solche ganze rationale Funktion von x ist, und da es keine zweite solche gibt, so ist hiermit die Identität (6) bewiesen.

---

[2]) Wie man die alte Identität (5) zum Aufsuchen des kleinsten Maximums in einer anderen Aufgabe benützen kann, wird im Nr. 6. vorliegender Note gezeigt.

Übrigens habe ich $h_k(x) = v_k(x)(l_k(x))^2$ das zu x_k gehörige „HERMITEsche Grundpolynom erster Art" genannt, und $v_k(x)$ den zur Stelle x_k gehörigen „charakteristischen Linearfaktor". Die Identität (6) besagt also, daß auch bei der HERMITEschen Interpolation die Summe der Grundpolynome erster Art identisch gleich 1 ist; d. h.

$$h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) \equiv 1.$$

Es ist mir nun neuerdings aufgefallen, daß *die Summe der charakteristischen Linearfaktoren* $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ *identisch gleich* n^2 *ist; d. h.*

$$v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x) \equiv n^2. \tag{11}$$

Zunächst möchte ich nun diese merkwürdige Identität beweisen.

2. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n beliebige, voneinander verschiedene Zahlen (die auch komplex sein können), und es sei

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \tag{12}$$

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n-1). \tag{14}$$

Um (13) und (14) zu beweisen, bemerke ich, daß, nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel für eine beliebige ganze rationale Funktion $g(x)$ von höchstens $(n-1)$-tem Grade,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, l_k(x) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} \right) x^{n-1} + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

gültig ist; dies besagt, daß der Koeffizient von x^{n-1} in einer ganzen rationalen Funktion $g(x)$ von höchstens $(n-1)$-tem Grade gleich $\sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)}$ ist.

Setze ich nun

$$g(x) = \omega''(x), \tag{16}$$

so erhalte ich, da doch in $\omega''(x)$ der Koeffizient von x^{n-1} gleich 0 ist,

(17) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0,$$

d. h. (13). Nehme ich aber

(18) $$g(x) = x\omega''(x) = n(n-1)x^{n-1} + \ldots,$$

so erhalte ich

(19) $$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n-1),$$

d. h.[3]) (14). (Natürlich gilt (13) und (14) auch dann, wenn ich $C\omega(x)$ statt $\omega(x)$ schreibe, wo C eine von Null verschiedene Konstante bezeichnet).

3. Übrigens kann man (13) und (14) auch wie folgt einsehen. Da bekanntlich[4])

(20) $$\frac{1}{2} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{x_k - x_\nu},$$

so ist

(21) $$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{\substack{k,\, \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \nu \neq k}} \frac{1}{x_k - x_\nu}.$$

Da aber für die Summe der symmetrischen Gliederpaare

(22) $$\frac{1}{x_k - x_\nu} + \frac{1}{x_\nu - x_k} = 0$$

gültig ist, so ist (13) bewiesen.

---

[3]) Setzt man allgemein $g(x) = x^r \omega^{(s)}(x)$, wo

$$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$s = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^r \frac{\omega^{(s)}(x_k)}{\omega'(x_k)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } r < s-1, \\ n(n-1)\ldots(n-(s-1)), & \text{wenn } r = s-1. \end{cases}$$

Für $r = 0$, $s = 2$ erhält man (13), für $r = 1$, $s = 2$ (14); für $s = n$ die sog. Eulerschen Relationen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^r}{\omega'(x_k)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } r < n-1, \\ 1, & \text{wenn } r = n-1. \end{cases}$$

[4]) Der Strich beim Summenzeichen deutet, wie üblich, an, daß das sinnlose Glied mit $\nu = k$ wegzulassen ist.

Weiter ist, nach (20),

$$\frac{1}{2}x_k\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}=\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{x_k}{x_k-x_\nu}, \tag{23}$$

also

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}=\sum_{\substack{k,\nu=1,2,\ldots,n\\ \nu\neq k}}\frac{x_k}{x_k-x_\nu}. \tag{24}$$

Da aber für die Summe der symmetrischen Gliederpaare jetzt

$$\frac{x_k}{x_k-x_\nu}+\frac{x_\nu}{x_\nu-x_k}=1 \tag{25}$$

gültig ist, so ergibt (24)

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}=\frac{n(n-1)}{2}, \tag{26}$$

d. h. (14).

4. Aus (13) und (14) folgt nun die zu beweisende Identität (11) unmittelbar. Da nämlich

$$v_k(x)=1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)=1+x_k\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}x, \tag{27}$$

so ist

$$\sum_{k=1}^{n}v_k(x)=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)x= \tag{28}$$

$$=n+n(n-1)-0=n^2.$$

Zusammenfassend kann ich also sagen:

Sind $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ die zu den voneinander verschiedenen Interpolationsstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörigen LAGRANGE*schen Grundpolynome, und sind*

$$h_k(x)=v_k(x)\,(l_k(x))^2=\left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)(l_k(x))^2, \tag{29}$$

$$k=1,2,\ldots,n,$$

die entsprechenden Grundpolynome erster Art der HERMITE*schen Interpolation, so ist (für jedes x)*

$$l_1(x)+l_2(x)+\ldots+l_n(x)\equiv 1, \tag{30}$$

$$v_1(x)\,(l_1(x))^2+v_2(x)\,(l_2(x))^2+\ldots+v_n(x)\,(l_n(x))^2\equiv 1, \tag{31}$$

$$v_1(x)+v_2(x)+\ldots+v_n(x)\equiv n^2. \tag{32}$$

5. Bemerkung. Die Nullstellen der Linearfaktoren $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots, v_n(x)$ habe ich die „konjugierten Punkte" von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genannt, und mit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bezeichnet. Wir ersehen aus (32) (oder (31)), daß es keine Interpolation (auch keine mit komplexen Abszissen) gibt, für welche die konjugierten Punkte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ alle zusammenfallen, d. h. für welche $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$ ist.

Hingegen ist, wie ich schon in meiner unter *b)* in der Fußnote [1]) zitierten Arbeit mitgeteilt habe, $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1}$ möglich. Es seien nämlich $1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = -1$ die Wurzeln der Gleichung

$$\omega(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0, \tag{33}$$

wo $P_m(x)$ das m-te LEGENDREsche Polynom bezeichnet. Dann ist

$$(1-x^2)\omega'' - (1+x)\omega' + n^2\omega = 0. \tag{34}$$

Aus (34) erhält man für $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$,

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{1}{1-x_k}, \tag{35}$$

so daß also

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) = 1 - \frac{x-x_k}{1-x_k} = \frac{1-x}{1-x_k}, \tag{36}$$

d. h.

$$X_k = 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{37}$$

Wenn ich aber (34) nach x differentiere und $x = x_n = -1$ einsetze, so erhalte ich

$$2\omega''(-1) - \omega'(-1) + n^2\omega'(-1) = 0, \tag{38}$$

d. h.

$$\frac{\omega''(-1)}{\omega'(-1)} = -\frac{n^2-1}{2}, \tag{39}$$

so dass also

$$v_n(x) = 1 - \frac{\omega''(-1)}{\omega'(-1)}(x+1) = 1 + \frac{n^2-1}{2}(x+1), \tag{40}$$

und endlich

$$X_n = -1 - \frac{2}{n^2-1}. \tag{41}$$

In diesem Falle ist also, nach (36) und (40),

$$v_1(1) = v_2(1) = \ldots = v_{n-1}(1) = 0, \; v_n(1) = n^2, \tag{42}$$

was mit der Identität (32) natürlich in Übereinstimmung ist.

6. Ich habe erwähnt, daß ich mit Hilfe der Identität (31) eine Aufgabe von „TSCHEBYSCHEFFscher Art“ *(Aufsuchen eines kleinsten Maximums)* der Interpolationstheorie gelöst habe. In dieser Nummer möchte ich nun die alte Identität (30) zur Lösung einer anderen, nicht uninteressanten Aufgabe benützen, in welcher es sich ebenfalls um das Aufsuchen eines kleinsten Maximums handelt.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n voneinander verschiedene reelle oder komplexe Werte. Es seien

$$l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x) \tag{43}$$

die zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörigen LAGRANGEschen Grundpolynome. Es sei weiter a ein Wert, der von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden ist. Man betrachte den *größten* der n Werte

$$|l_1(a)|, |l_2(a)|, \ldots, |l_n(a)|, \tag{44}$$

den ich mit

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} |l_k(a)| = M(a) = M \tag{45}$$

bezeichne. Da nach (30)

$$l_1(a) + l_2(a) + \ldots + l_n(a) = 1, \tag{46}$$

so ist $M \geqq \frac{1}{n}$. Ich frage: ist $M = \frac{1}{n}$ möglich, d. h. gibt es in der x-Ebene eine Interpolationspunktgruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und eine Stelle a, so daß

$$|l_1(a)| \leqq \frac{1}{n}, |l_2(a)| \leqq \frac{1}{n}, \ldots, |l_n(a)| \leqq \frac{1}{n} \tag{47}$$

gilt? Diese Frage möchte ich hier beantworten.

Aus (46) und (47) folgt augenscheinlich

$$l_1(a) = l_2(a) = \ldots = l_n(a) = \frac{1}{n}, \tag{48}$$

d. h., wenn ich

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \tag{49}$$

setze,

$$\frac{\omega(a)}{\omega'(x_k)(a - x_k)} = \frac{1}{n}, \tag{50}$$

oder

$$(x_k - a)\,\omega'(x_k) + n\,\omega(a) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{51}$$

Aus (51) folgt aber, daß $(x - a)\,\omega'(x) + n\,\omega(a)$ durch $\omega(x)$ teilbar ist, so daß also

(52) $$(x-a)\,\omega'(x)+n\,\omega(a)=C\,\omega(x)$$

besteht. Setze ich hier $x=a$, so erhalte ich (da $\omega(a)\neq 0$) $C=n$, so daß also $\omega(x)$ die Differentialgleichung

(53) $$(x-a)\,\omega'(x)-n\,\omega(x)+n\,\omega(a)=0$$

befriedigen muß. Setze ich nun

(54) $$\omega(x)=\omega(a)+\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (x-a)^\nu,$$

und substituiere $\omega(x)$ in (53), so erhalte ich

(55) $$\sum_{\nu=1}^{n} (\nu-n)\,c_\nu (x-a)^\nu=0,$$

d. h.

(56) $$(\nu-n)\,c_\nu=0, \text{ für } \nu=1, 2, \ldots, n-1,$$

woraus

(57) $$c_\nu=0, \text{ für } \nu=1, 2, \ldots, n-1$$

folgt, so daß also, nach (54) und (57),

(58) $$\omega(x)=\omega(a)+c_n(x-a)^n.$$

Mein bisheriges Ergebnis ist das Folgende:

Wenn für die Gruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und für den Wert a die n Ungleichungen (47) bestehen, so ist

(59) $$\omega(x)=\alpha+\beta\,(x-a)^n,$$

wo $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$.

Genügen nun die zu den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung

(60) $$\omega(x)=\alpha+\beta\,(x-a)^n=0$$

gehörenden $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ tatsächlich an der Stelle $x=a$ den Ungleichungen (47)? Ja, denn es ist

(61) $$l_k(a)=\frac{\omega(a)}{\omega'(x_k)(a-x_k)}=\frac{\alpha}{n\beta\,(x_k-a)^{n-1}(a-x_k)}=$$
$$=-\frac{\alpha}{n\beta\,(x_k-a)^n},$$

und da, nach (60),

(62) $$\beta\,(x_k-a)^n=-\alpha$$

ist, so ist also tatsächlich

(63) $$l_k(a)=-\frac{\alpha}{n\,.\,(-\alpha)}=\frac{1}{n}, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Ich habe also das folgende Resultat erhalten:

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n voneinander verschiedene Interpolationsstellen der komplexen x-Ebene und $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ die Grundpolynome der zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörenden LAGRANGE*schen Interpolation, so sind für eine Stelle a der x-Ebene die Ungleichungen*

$$|l_1(a)| \leqq \frac{1}{n}, \quad |l_2(a)| \leqq \frac{1}{n}, \ldots, |l_n(a)| \leqq \frac{1}{n} \tag{64}$$

dann, und nur dann, simultan befriedigt, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks sind, und a der Mittelpunkt dieses n-Ecks ist.

7. Sind die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wieder reell, so ist an einer Stelle x der absolute Wert mindestens einer der Grundpolynome der zugehörigen LAGRANGEschen Interpolation größer als $\frac{1}{n}$. Dies folgt aus dem soeben ausgesprochenen Satze. Es sei nun für ein reelles x

$$v_1(x) \geqq 0, \quad v_2(x) \geqq 0, \ldots, v_n(x) \geqq 0.$$

Ich behaupte, daß dann mindestens einer der Werte

$$|l_1(x)|, \quad |l_2(x)|, \ldots, |l_n(x)|$$

$\leqq \frac{1}{n}$ *ist.*

B e w e i s. Aus (31) und (32) folgt ganz allgemein

$$\frac{v_1(x)(l_1(x))^2 + v_2(x)(l_2(x))^2 + \ldots + v_n(x)(l_n(x))^2}{v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x)} = \frac{1}{n^2}, \tag{65}$$

also, mit Rücksicht auf $v_k(x) \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, für mindestens einen Index s

$$(l_s(x))^2 \leqq \frac{1}{n^2}, \tag{66}$$

d. h.

$$|l_s(x)| \leqq \frac{1}{n}, \tag{67}$$

w. z. b. w.

Ist speziell $-1 \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq 1$ und im Intervalle $-1 < x < 1$ kein konjugierter Punkt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gelegen, so ist die Behaptung für das ganze Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ gültig.

Budapest, den 22-ten November 1931.

(Eingegangen am 23. November 1931.)